لیلا کولایی‌زاده

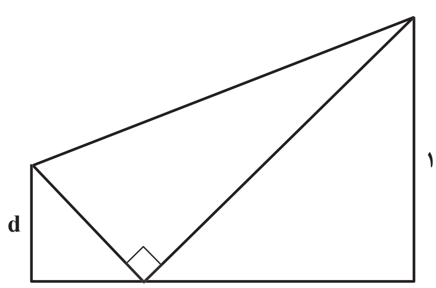
هندسهٔ «کاغذ» و «تا»

اشاره

در این مقاله، مســـئله‌ای از مبحث هندسهٔ کاغذ و تا طرح و حل می‌شود و در پایان موردی دیگر از این نوع مسئله‌ها مطرح و حل آن به‌عنوان تمرین به مخاطبان واگذار می‌شود.

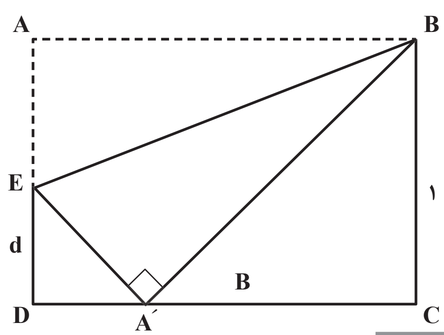
هندسهٔ کاغذ و تا عنوان یک سلسله از مسئله‌های هندسی است. در این نوع مسئله‌ها، یک صفحه کاغذ با اندازه‌های مشخص در امتداد یک خط راست که آن را خط تا می‌نامند) تا می‌شود و یافتن یک یا چند طول مجهول در شکل تاخورده خواسته می‌شود.

مسئله: یک صفحه کاغذ مستطیل‌شکل به طول $\sqrt{۲}$ و عرض ۱ به صورتی که در شــکل ۱ می‌بینید، تا شده است؛ به‌طوری که گوشهٔ سمت چپ بالای روی نقطه‌ای در ضلع پایینی نشسته است. اندازهٔ d چقدر است؟



شکل ۱

حل: شکل داده شده را با اضافه کردن بخش‌هایی از مستطیل که در اثر تا کردن دیده نمی‌شوند، بازسازی و در شکل رئوس را نام‌گذاری می‌کنیم (شکل ۲)



شکل ۲

طول مستطیل برابر $\sqrt{2}$ است، پس داریم:

$AB = DC = \sqrt{2}$

آیا در شکل پاره‌خط دیگری را که اندازهٔ طول آن برابر $\sqrt{2}$ باشد، می‌بینید؟ بله! درست است؛ طول A'B نیز برابر $\sqrt{2}$ است. زیرا A'B تصویر تاشدهٔ AB است.

حال اندازهٔ طول AE را بر حسب d پیدا می‌کنیم:

$AD = 1, ED = d \Rightarrow AE = 1 - d$

آیا می‌توانید پاره‌خط دیگری را که طولش $1-d$ باشد، بیابید؟ درست است. از آنجا که بعد از تاکردن کاغذ، AE به A'E تبدیل می‌شود، بنابراین:

$A'E = 1 - d$

حال به دنبال مثلث قائم‌الزاویه‌ای در شکل بگردید که اندازهٔ دو ضلع از سه ضلع آن معلوم باشند. درست متوجه شده‌اید، در مثلث A'CB داریم:

$A'B = \sqrt{2}\ ,\ BC = 1$

ضلع سوم این مثلث، یعنی A'C را می‌توانیم به سهولت با استفاده از رابطهٔ ***فیثاغورس*** به صورت زیر محاسبه کنیم:

$$A'C^2 = A'B^2 - BC^2$$
$$A'C^2 = (\sqrt{2})^2 - (1)^2 = 1$$

به وضوح داریم: $A'C > 0$، پس: $A'C = \sqrt{1} = 1$

با مشخص شدن طول A'C، برای محاسبهٔ طول A'D مشکلی نخواهیم داشت:

$A'D = DC - A'C = \sqrt{2} - 1$

حال نوبت آن است که به سراغ مثلث EDA' برویم. در این مثلث اندازهٔ ضلع A'D را داریم و اندازهٔ دو ضلع دیگر را نیز بر حسب d به دست آورده‌ایم. چون EDA' مثلثی قائم‌الزاویه است، می‌توانیم رابطهٔ فیثاغورس را در مورد آن به‌کار بگیریم:

$$A'E^2 = A'D^2 + DE^2$$
$$\Rightarrow (1-d)^2 = (\sqrt{2}-1)^2 + d^2$$
$$\Rightarrow 1 - 2d + d^2 = 2 - 2\sqrt{2} + 1 + d^2$$
$$\Rightarrow -2d = 2 - 2\sqrt{2}$$
$$\Rightarrow d = \sqrt{2} - 1$$

البته اگر شما حوصلهٔ مجذور کردن عبارت‌هایی مانند $1-d$ و $\sqrt{2}-1$ را نداشته باشید، راه‌حل دیگری

نیز می‌توانید دنبال کنید که به شرح زیر است:

کمی به عقب برمی‌گردیم و به محاسبهٔ برخی زاویه‌ها در شکل۲ می‌پردازیم. اندازهٔ ضلع‌های مثلث A'CB برابر ۱، ۱ و $\sqrt{2}$ است. این یعنی ما با یک مثلث قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین روبه‌رو هستیم. همان‌طور که می‌دانید، در چنین مثلثی دو زاویهٔ ۴۵ درجه‌ای باید موجود باشد؛ یعنی:

$\angle BA'C = \angle A'BC = 45^\circ$

بنابراین می‌توان نوشت:

$$\angle DA'E = 180 - \angle EA'B - \angle BA'C$$
$$= 180^\circ - 90^\circ - 45^\circ = 45^\circ$$

به راحتی می‌توان نتیجه گرفت که اندازهٔ زاویهٔ DEA' نیز برابر ۴۵ درجه و در نتیجه مثلث EDA' یک مثلث قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین است؛ یعنی:

$A'D = DE \Rightarrow DE = \sqrt{2} - 1 \Rightarrow d = \sqrt{2} - 1$

حال حل مسئلهٔ زیر را بر عهدهٔ آن دسته از شماهایی می‌گذاریم که دنبال چالش بیشتری هستید:

یک صفحه کاغذ مستطیلی‌شکل به نام ABCD، با ابعاد AB=۸ و BC=۶ را در نظر بگیرید.

اگر این صفحه کاغذ را جوری تا کنید که گوشهٔ A با وسط ضلع DC در نقطه M برخورد کند، اندازهٔ طول خط تا را محاسبه کنید.